VO Analysis

5.3.18

Mo 8:00 – 9:30 Di 9:45 – 11:15
9:35 – 10:20

UE 5.3. –... Organisatorisches
12.3. –... 1. Übungsblatt

Literatur ⇝ Skriptum
⇝ Analysis in hist. Entwicklung

Analysis

Zahlen und Abbildungen + exaktes Begründen des Schulwissens

zentral: Begriff d. GRENZWERTS

1. Kapitel: Zahlen und Abbildungen

1.1. Def (Körper, d.h. mathem. Struktur für Grundrechnen)

Körperaxiome (= Rechenregeln, ~~Regel~~ Rechenaxiome)

3 Komponenten: Menge K mit Addition $+ : K \times K \to K$ und Multiplikation $\cdot : K \times K \to K$ heißt Körper, falls

(1) $\forall x, y, z \in K: \quad (x+y)+z = x+(y+z)$

Klammern bei Add. sind überflüssig

(2) $\exists\, 0 \in K : \forall x \in K: \quad x + 0 = 0 + x = x$

0 ist das neutrale Element bzgl. +

(3) $\forall x \in K: \exists\, x^{-1} = -x \in K: \; x + (-x) = (-x) + x = 0$

Subtraktion: z.B. $7 - 5 = 2 + 5 - 5 = 2$

(4) $\forall x, y \in K: \quad x+y = y+x$

Reihenfolge bei + spielt keine Rolle

(5) $\forall x, y, z \in K: \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

(6) $\exists\, 1 \in K : \forall x \in K: \quad 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$

1 ist neutrales Element bzgl. ·

(7) $\forall x \in K: \exists\, x^{-1} = \frac{1}{x} : \; x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$
$x \notin 0$

Division: z.B. $\frac{25}{5} = \frac{5 \cdot 5}{5} = \underbrace{5 \cdot \frac{1}{5}}_{=1} \cdot 5$

(8) $\forall x,y \in K: \quad x \cdot y = y \cdot x$

(9) $\forall x,y,z \in K: \quad x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

Verträglichkeit v. Multiplikation und Addition
Klammern und Reihenfolge von $+$ und $\cdot$ sind wichtig

$\boxed{S}$ Am Anfang: Rechenregeln!

$(K,+)$ abelsche Gruppe

$(K\setminus\{0\},\cdot)$ abelsche Gruppe

Bsp.

(i) Jeder Körper enthält 0 und 1.

(ii) $\mathbb{Z}_2 = \{[0],[1]\} = \{\{\ldots,-2,0,2,4,\ldots\}, \{\ldots-3,-1,1,3,\ldots\}\}$

Addition

+	[0]	[1]
[0]	[0]	[1]
[1]	[1]	[0]

$\cdot$	~~[0]~~	[1]
~~[0]~~		
[1]		[1]

ist ein Körper, weil

Galois: ohne $\mathbb{Z}_2$ $\rightsquigarrow$ keine Computer

(1) $(\underbrace{[0]}_{x} + \underbrace{[0]}_{y}) + \underbrace{[0]}_{z} = [0] \stackrel{?}{=}$

$[0] + ([0] + [0])$

$(\underbrace{[0]}_{x} + \underbrace{[0]}_{y}) + \underbrace{[1]}_{z} = [1] \stackrel{?}{=}$

$[0] + ([0] + [1])$

$\vdots$ alle möglichen Kombinationen
~~überprüfen~~ überprüfen

(2) das neutrale Element ist [0]
(aus Tabelle ersichtlich)

(3) das inverse Element von [0]
ist [0]
——"—— [1]
ist [1]
(siehe Tabelle)

(4) Tabelle ist symmetrisch

(5) $([1] \cdot [1]) \cdot [1] = [1] \cdot ([1] \cdot [1])$

(6) das neutrale Element ist [1]
(siehe Tabelle)

(7) das inverse Element von [1] ist [1] (siehe Tabelle)

(8) $\underbrace{[1]}_{x} \cdot \underbrace{[1]}_{y} = \underbrace{[1]}_{y} \cdot \underbrace{[1]}_{x}$ ✓

(9) $[1] \cdot ([0]+[0]) = \ldots$

! überprüfen für $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}_2$

(iii) $K = \mathbb{N} = \{ 1, 2 := 1+1, 3 := 1+1+1, \ldots \}$ Definiens d. natürlichen Zahlen

natürliche Zahlen (ohne θ)

$(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ist kein Körper, $\underbrace{\text{denn } \theta \notin \mathbb{N}}_{\text{Gegenbeispiel}}$

(iv) $K = \mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper, denn z.B.

$\exists x \in \mathbb{Z}, x \neq \theta$
$(x=2)$
s.d. $\forall x^{-1} \in K : 2 \cdot x^{-1} \neq 1$

(v) $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ \underbrace{ggT(p,q) = 1}_{\substack{\text{wegen } \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \\ \rightsquigarrow p \text{ und } q \\ \text{müssen teilerfremd} \\ \text{sein}}} \right\}$

mit Addition $+$:

$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\quad \frac{p}{q} + \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} = \frac{p+\tilde{p}}{q+\tilde{q}}$

mit Multiplikation $\cdot$:

$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\quad \frac{p}{q} \cdot \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} = \frac{p \cdot \tilde{p}}{q \cdot \tilde{q}}$

ist kein Körper, denn

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \underbrace{2 \cdot \frac{1}{2}}_{\substack{=1 \\ \text{(Axiom 7)}}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

d.h. $\frac{1}{2}$ ist das neutrale Element bzgl. $+$, aber (Widerspruch) 0 ist das neutrale Element bzgl. $+$ (eindeutig)

2.2. 0 ist das eindeutige neutrale Element bzgl. $+$

BAW $\exists\, 0, 0' \in K,\ 0 \neq 0'$ und s.d. $\forall x, y \in K$ gilt $x + 0 = \underline{0 + x} = \underline{x}$ und $\underline{y + 0'} = 0' + y = \underline{y}$

$x = 0'$
$(y = 0)$

Daraus folgt:

$$0 = 0 + 0' = 0' \text{ (Widerspruch)}$$

$\blacksquare$

$\boxed{S}$ Addition bedeutet: es kommt etwas hinzu

(vi) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, wobei $x: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$$\frac{p}{q} + \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} = \frac{p \cdot \tilde{q} + \tilde{p} \cdot q}{q \cdot \tilde{q}}$$

und $\cdot$ wie in (v) ist ein Körper

Alle Rechenregeln folgen aus (1) – (9):

1.2. Proposition Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Dann gilt

(i) $x \cdot 0 = 0$

(ii) $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$

Bw (i) $x \cdot 0 \overset{(2)}{=} x \cdot (0 + 0) \overset{(9)}{=} x \cdot 0 + x \cdot 0$ und

$$x \cdot 0 \overset{(2)}{=} x \cdot 0 + 0$$

$$\Rightarrow x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot 0 + 0$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} \overbrace{-x \cdot 0 + x \cdot 0}^{0} + x \cdot 0 = \overbrace{-x \cdot 0 + x \cdot 0}^{0} + 0$$

$\Rightarrow$ $x \cdot 0 = 0$

(ii) "$\Rightarrow$" Aus $x \cdot y = 0$ folgt

1. Falls ~~$x \neq 0$, $y \neq 0$: $0 \cdot y = 0$~~

$x \neq 0$ $\quad x \cdot y = 0 \Rightarrow$

dann existiert $\frac{1}{x} \in K$

$$\underbrace{\frac{1}{x} \cdot x}_{\overset{(7)}{=1}} \cdot y = \frac{1}{x} \cdot 0 \overset{(i)}{=} 0$$

$$\overset{(6)}{\Rightarrow} y = 0$$

2. Falls $y \neq 0 \leadsto$ analog zu (1)

3. $x = 0$, $y = 0 \leadsto$ trivial

"$\Leftarrow$" Falls $(x=0) \vee (y=0) \overset{(i)}{\Rightarrow} x \cdot y = 0$

(da $(0 \cdot y = 0) \vee (x \cdot 0 = 0)$) $\blacksquare$

1.3. Def. Ein Körper $(K, +, \cdot)$ heißt geordneter Körper, falls

totale Ordnung

(1) $\forall x, y, z \in K$: $(x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow x < z$
(d.h. Relation "<" ist transitiv)

(2) $\forall x, y \in K$: $(x < y \quad x = y) \vee (y < x)$
$(\forall x, y, z \in K: x \leq y \vee x > y)$

Zusammenspiel zw. $+, \cdot, <$

(3) $\forall x,y,z \in K: \quad x<y \Rightarrow x+z<y+z$

(4) $\forall x,y \in K: (x \overset{>}{\not<} 0 \wedge y \overset{>}{\not<} 0) \Rightarrow x \cdot y > 0$

Aus Def 1.3. (1) - (4) folgen alle Rechenregeln für Ungleichungen.

Beispiel (Totale Ordnung auf $(\mathbb{Q},+,\cdot)$)

$$\frac{p}{q} < \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} :\Longleftrightarrow p\tilde{q} < \tilde{p}q \qquad \left(\frac{p\cdot\tilde{q}}{q\cdot\tilde{q}} < \frac{\tilde{p}\cdot q}{\tilde{q}\cdot q}\right)$$

1.4. Proposition: $(K,+,\cdot)$ sei ein geordneter Körper. Dann gilt

(i) $\forall x,y \in K: \quad x<y \Longleftrightarrow -x>-y$

(ii) $\forall x \in K\setminus\{0\}: \quad x>0 \veebar -x<0$

(x ist entweder positiv oder negativ)

(iii) $1>0$ (folgt aus (i) und (ii))

Bew (i) "$\Rightarrow$" $\quad x<y \overset{\text{Def 1.3. (3)}}{\Rightarrow} x+(-x-y)<y+(-x-y)$

$\Rightarrow x-x-y < y-x-y$

$\Rightarrow -y < -x$

"$\Leftarrow$" $\quad -x>-y \overset{\text{Def. 1.3. (3)}}{\Rightarrow} -x+x+y > -y+x+y$

$\Rightarrow y>x$

ii) Aus Def. 1.3 (2) mit $y = 0 \Rightarrow$

— Def. 1.4. (ii)

$$(x < 0) \veebar \boxed{(0 < x)}$$

Def. 1.4. (i)

Es gilt $x < 0 \iff -x > \underbrace{\underbrace{-0}_{\substack{-0 \text{ ist das additive} \\ \text{inverse Element} \\ \text{von } 0}} + 0}_{\substack{\text{neutrales} \\ \text{Elem. wird} \\ \text{addiert}}} = 0$

(Def. 1.1. (2) + (3))

[5] Mit Strukturen beginnen, weitere Eigenschaften später erklären

Bemerkungen

(i) In einem geordneten Körper kann man Intervalle definieren.

(ii) Aus $1 > 0$ folgt (Def. 1.3 (3))

$$1 < 1+1 < 1+1+1 < \dots$$

(d.h. alle Elemente d. natürlichen Zahlen sind paarweise verschieden bzw. $\mathbb{N}$ ist eine Menge)

Folgerung $\mathbb{N}$ gehört zu jedem geordneten Körper.

(denn $1 \in K$ und $1+1 \in K$ wegen
$+ : K \times K \to K$, ...)

d.h. geordnete Körper hat unendlich viele Elemente

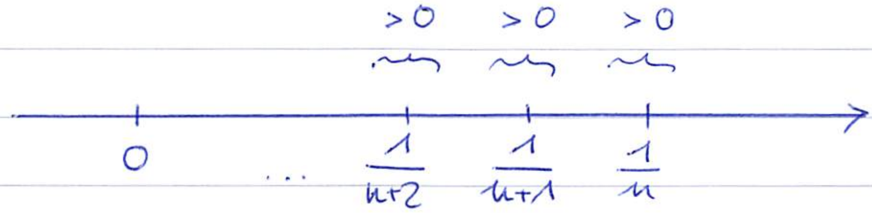
(iii) $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ ist kein geordnete Körper, da $\underset{\text{Menge von 2 Mengen } ([0], [1])}{\underbrace{\mathbb{Z}_2}}$ endlich

1.5. Def. Ein geordneter Körper $(K, +, \cdot)$ heißt archimedisch, falls

$$\forall x \in K : \exists n \in \mathbb{N} \; (n \in K) : x < n$$ (Axiom von Archimedes)

Folgerungen

(i)



$$0 \leq x < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = 0$$

(ii)

$$\forall x, y \in K, \; 0 < x < y : \exists n \in \mathbb{N} : y < n \cdot x$$